PEAD
LICEO NAVAL "ALMIRANTE GUISE"

B-III

MÓDULO

Matemática

2

SECUNDARIA

CALLE MONTI 350 - SAN BORJA
ALTURA CDRA. 28 AV. AVIACIÓN
DOCENTE: PEDRO GRANDA SORIA

226-67-26 ANEXO 111
WEB: WWW.LNAG.EDU.PE
E-MAIL: PGRANDA@LNAG.EDU.PE

DERECHOS RESERVADOS - DERECHOS RESERVADOS - DERECHOS RESERVADOS - DERECHOS RESERVADOS - DERECHOS RESERVADOS

TERCER BIMESTRE

2019

"Los caminos de la lealtad son siempre rectos"

Ramón Llull

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

TERCER BIMESTRE

2º año 2019

FACTORIZACIÓN

- Factor común.
- Diferencia de cuadrados
- Trinomio cuadrado perfecto.
- Suma de cubos
- Diferencia de cubos
- Trinomio de la forma $x^2 + Bx + C$
- Trinomio de la forma $Ax^2 + Bx + C$

ESTADÍSTICA

- Tabla de distribución de frecuencia
- Gráfico de barras
- Polígono de frecuencias
- Gráfico de sectores

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

- Media aritmética
- Mediana
- Moda

GEOMETRIA

- Semejanza y Congruencia de triángulos.
- Polígonos: Propiedades. Áreas.
- Áreas y Volúmenes de sólidos Geométricos

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval “Almirante Guise”

FACTORIZACIÓN

En el proceso de transformación de un polinomio en una multiplicación indicada de factores:

Ej. Factorizar: $\underbrace{x^2 - 3x - 10}_{\text{Polinomio}} = \underbrace{(x - 5)(x + 2)}_{\text{multiplicación indicada de factores.}}$

Estos factores deben ser factores primos

Factor primo, es aquel polinomio divisible por si mismo y la unidad

Ejemplo:

(1) (x + 2) es un factor primo porque es divisible por si mismo y por la unidad.

(2) (x^2 + 1) es factor primo, porque es divisible por si mismo y por la unidad (esta unidad es un polinomio de grado cero es decir una constante).

Métodos de Factorizacion:

I. Factor Común: monomio

Ejemplos:

1) Factorizar el polinomio $5x^3 - 10x^2 + 20x$.

Solución:

- El mcd. de los coeficientes es **5**.
- La variable x con su menor exponente es x por lo tanto, el factor común es $5x$.
- Dividir cada término de la expresión entre el factor común.

Luego:

$$5x^3 - 10x^2 + 20x = \mathbf{5}x\,(x^2 - 2x + 4)$$

2) Factorizar el polinomio $6x^2y - 12x^2y^2 - 24x^4y^4$

Solución:

- mcd (6, 12, 24) = 6
- La variable x con su menor exponente es x2
- Factor común: $6x^2$ y

Luego:

$$6x^2y - 12x^2y^2 - 24x^4y^4 = \mathbf{6x^2y}\,(1 - 2y - 4x^2y^3)$$

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

3) Factorizar $16x^3y^2z^5 + 18x^2y^3z^2 - 24x^4y^5$

Solución:

- Hallar el MCD (16, 18, 24) = 2
- Los factores literales comunes con su menor exponente: x^2 y^2
- Dividir cada término de la expresión entre el factor común.

Luego:

$$16x^3y^2z^5 + 18x^2y^3z^2 - 24x^4y^5 = \mathbf{2x^2y^2}\,(8xz^5 + 9yz^2 - 12x^2y^3)$$

II. Factor Común Polinomio.

Ejemplos:

1. Factorizar el polinomio $(x - 3)\,6 + (x - 3)x$.

Solución:

El polinomio tiene en sus dos términos **$(x - 3)$** 6 y **$(x - 3)$**x el factor común $(x - 3)$.

Considerando al binomio $(x - 3)$ como un solo número, lo escribimos como primer factor y a continuación el otro factor formado por los cocientes que resultan de dividir cada término del polinomio dado por el factor común $(x - 3)$; así:

$$\mathbf{(x - 3)}6 + \mathbf{(x - 3)}x = \mathbf{(x - 3)\,(6 + x)}$$

2. Factorizar el polinomio $3x\,(m + n) - 2\,(m + n)$.

Solución:

$$3x\,(m + n) - 2(m + n) = \mathbf{(m + n)\,(3x - 2)}$$

3. Factorizar el polinomio $(x - y) + (x - y)m$

Solución:

$$(x - y) + (x - y)m = (x - y)\,(1 + m)$$

4. Factorizar el polinomio $4\,t\,(x - y + z) - 4(x - y + z)$

$$4\,t\,(x - y + z) - 4(x - y + z) = (x - y + z)\,(4\,t - 4\,)$$

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

5. Factorizar:

$(m + 2)x^2 - (m + 2)x + (m + 2) = (x^2 + x + 1)(m + 2)$

III. Por Agrupación de Términos.

Consiste en agrupar convenientemente los términos de un polinomio, a fin de obtener en cada grupo, un factor que sea común a todos los términos.

Ejemplo 1. Factorizar:

$$x^2 + 3x + 7x + 21.$$

Se observa que los dos primeros términos de este polinomio tienen el factor común x, y los dos últimos tienen el factor común 7. Luego, podemos escribir el polinomio dado como un asuma de dos términos cada uno de los cuales tiene un factor común, agrupándolos en la forma siguiente:

$$x^2 + 3x + 7x + 21 = (x^2 + 3x) + (7x + 21)$$

Ahora sacamos el factor común monomio de cada grupo y se tiene:

$$x^2 + 3x + 7x + 21 = \mathbf{x(x + 3)} + \mathbf{7(x + 3)}$$

Resulta así que los dos términos del polinomio tienen el factor común binomio
$(x + 3)$. Por consiguiente, aplicando como antes la propiedad distributiva, se obtiene:

$$x^2 + 3x + 7x + 21 = \mathbf{(x + 3)(x + 7)}$$

Quedando así factorizado el polinomio propuesto.

Generalmente no hay una sola forma de agrupar los términos de un polinomio. Así, por ejemplo, en el polinomio anterior podemos agrupar el primero y tercer término, los cuales tienen el factor común x, y el segundo y cuarto que tienen el factor común 3, y tenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 7x + 21 &= (x^2 + 7x) + (3x + 21) \\ &= x\,\underline{(x + 7)} + 3\,\underline{(x + 7)} \\ &= (x + 7)(x + 3) \end{aligned}$$

Este resultado equivale al anterior, puesto que el orden de los factores no altera el producto.

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

Ejemplo 2. Factoriza sobre el conjunto de los enteros el polinomio

$$x^2 + 4x + 3x + 12$$

Solución:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3x + 12 &= (x^2 + 4x) + (3x + 12) \\ &= x\mathbf{(x + 4)} + 3\mathbf{(x + 4)} \\ &= \mathbf{(x + 4)\,(x + 3)} \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Factorizar $ax – ay + bx – by$ sobre el conjunto de los enteros.

Solución:

$$\begin{aligned} ax – ay + bx – by &= (ax – ay) + (bx – by) \\ &= a(x – y) + b(x – y) \\ &= \mathbf{(x – y)\,(a + b)} \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Factorizar completamente el polinomio $2mx – m – 2x + 1$

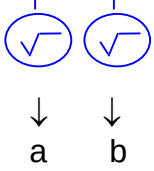
Solución:

$$\begin{aligned} 2mx – m\,2x + 1 &= (2mx – m) + (–2x + 1) \\ &= m\,\mathbf{(2x – 1)} – \mathbf{(2x – 1)} \\ &= (2x – 1)\,(m – 1) \\ &= 2\left(x – \frac{1}{2}\right)(m – 1) \end{aligned}$$

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval “Almirante Guise”

FACTORIZACION DE UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$



La expresión factorizada, se lee así: "Suma de las raíces cuadradas multiplicada por la diferencia de las mismas".

Ejemplos:

(1) Factorizar: $x^4 - y^2$

Solución:

- Extraemos la raíz cuadrada de ambos términos: $\sqrt{x^4} = x^{4/2} = x^2$

  $\sqrt{y^2} = y^{2/2} = y^1 = y$
- Escribimos la expresión factorizada como la suma por la diferencia de las raíces cuadradas halladas:

  $x^4 - y^2 = (x^2 + y)(x^2 - y)$.

(2) Factorizar: $(x + 2y)^2 - (2a + b)^2$

Solución: $x + 2y$ $\quad$ $2a + b$

- Luego la expresión factorizada será la multiplicación indicada de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas:

  $[(x + 2y) + (2a + b)]\,[(x + 2y) - (2a + b)]$
- Suprimiendo paréntesis: $[x + 2y + 2a + b]\,[x + 2y - 2a - b]$. Respuesta.
- Luego: $(x + 2y)^2 - (2a + b)^2 = (x + 2y + 2a + b)(x + 2y - 2a - b)$

(3) Factorizar: $x^4 - 1$

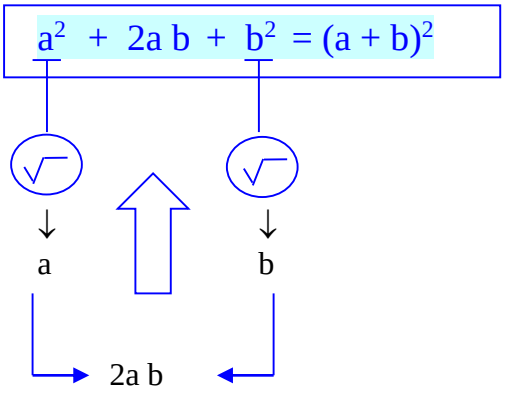
$x^4 - 1$
$(x^2)^2 - 1$
$(x^2 - 1)(x^2 + 1)$

Se puede seguir factorizando
$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

Luego: $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

FACTORIZACION DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (TCP)



Si el doble producto de las raíces de los términos extremos del trinomio coincide con el término central, entonces se trata de un TCP.

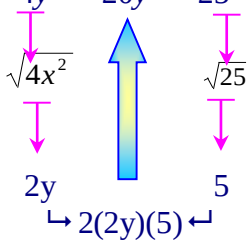
Si ya hicimos la comprobación respectiva, entonces la expresión factorizada se escribe como EL CUADRADO DE LA SUMA DE AMBAS RAÍCES.

Ejemplos:

(1) Factorizar: $4y^2 + 20y + 25$

Solución:

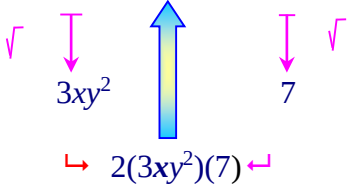
- Comprobamos: $4y^2 + 20y + 25$



- El polinomio factorizado se escribe como el cuadrado de la suma de las raíces:

$$4y^2 + 20y + 25 = (2y + 5)^2$$

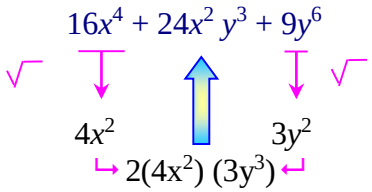
(2) Factorizar: $9x^2y^4 + 42xy^2 + 49$



$$9x^2y^4 + 42xy^2 + 49 = (3xy^2 + 7)^2$$

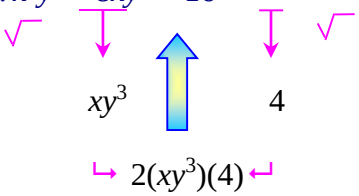
Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

(3) Factorizar: $16x^4 + 24x^2 y^3 + 9y^6$



$16x^4 + 24x^2 y^3 + 9y^6 = (4x^2 + 3y^3)^2$

(4) Factorizar: $x^2y^6 - 8xy^3 + 16$



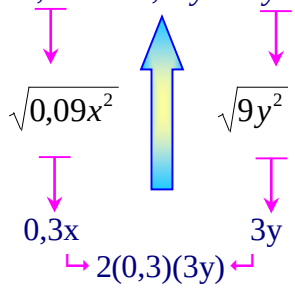
Como el término central es el signo negativo, la expresión factorizada es:

$x^2 y^6 - 8xy^3 + 16 = (xy^3 - 4)^2$

(5) Factorizar: $0{,}09x^2 - 1{,}8y + 9y^2$

Solución:

- Comprobamos: $0{,}09x^2 - 1{,}8xy + 9y^2$



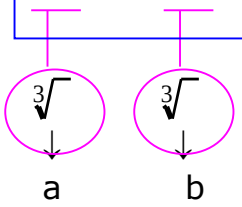
Comprobamos que es un T.C.P.

Luego: $0{,}09x^2 - 1{,}8y + 9y^2 = \mathbf{(0{,}3x - 3y)^2}$

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

FACTORIZACION DE UNA SUMA DE CUBOS

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$



Aquí notamos lo siguiente:

- Los términos del factor binomio son las raíces cúbicas de los términos del polinomio original.
- Elevando al cuadrado el 1° término del 1° factor obtenemos el 1° término del 2° factor.
- Si multiplicamos (sin considerar el signo) los dos términos del primer, factor, obtenemos el término central del 2° factor.
- Elevando al cuadrado el 2° término del 1° factor, obtenemos el 3° término del 2° factor.

Recuerda:
Exponente fraccionario:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

$\sqrt[3]{a^9} = a^{9/3} = a^3$

$\sqrt[3]{x^{18}} = x^{18/3} = x^6$

$\sqrt[3]{y^{21}} = y^{21/3} = y^7$

Ejemplos:

(1) Factorizar: $a^9 + 8$

Solución:

- Raíz cúbica del 1° término: $\sqrt[3]{a^9} = a^{9/3} = a^3$
- Raíz cúbica del 2° término: $\sqrt[3]{8} = 2$
- La suma de estas dos raíces cúbicas constituyen el primer factor buscado:

$$a^9 + 8 = (a^3 + 2)\ (\qquad\qquad)$$

- El factor trinomio que falta se calcula así:
  - Los términos extremos son los cuadrados de los términos del factor binomio:

$$a^9 + 8 = (a^3 + 2)\ (a^6 \qquad\qquad + 4)$$

  - El término central es el producto de los términos del factor binomio con el signo cambiado:

$$a^9 + 8 = \mathbf{(a^3 + 2)\ (a^6 - 2a^3 + 4)}$$

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

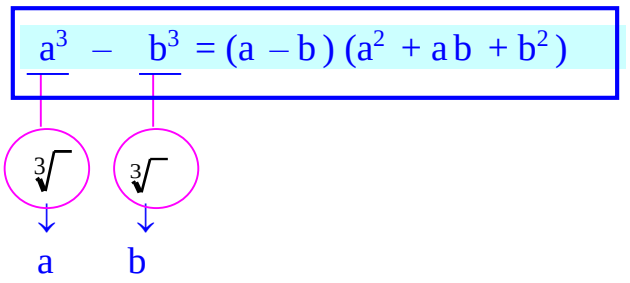
(2) Factorizar: $x^{12} + 27y^3$

Solución:

- Raíz cúbica del 1° término: $\sqrt[3]{x^{12}} = x^{12/3} = x^4$
- Raíz cúbica del 2° término: $\sqrt[3]{27y^3} = 3y$
- La expresión factorial quedará así:

$$x^{12} + 27y^3 = (x^4 + 3y)(x^8 - 3x^4y + 9y^2)$$

FACTORIZACION DE UNA DIFERENCIA DE CUBOS



Procedemos como en suma de Cubos, variando únicamente los signos.
En el factor binomio hay una diferencia y todos los signos del factor trinomio son positivos.

Ejemplos:

(1) Factorizar: $8y^{18} - 125$

Solución:

- Raíz cúbica del 1° término: $\sqrt[3]{8y^{18}} = 2y^6$
- Raíz cúbica del 2° término: $\sqrt[3]{125} = 5$
- La expresión factorizada quedará así:

$8y^{18} - 125 = \mathbf{(2y^6 - 5)(4y^{12} + 10y^6 + 25)}$

(2) Factorizar: $64x^6 - 27$

Solución:

- Raíz cúbica del 1° término: $\sqrt[3]{64x^6} = 4x^2$
- Raíz cúbica del 2° término: $\sqrt[3]{27} = 3$
- Polinomio factorizado: $64x^6 - 27 = \mathbf{(4x^2 - 3)(16x^4 + 12x^2 + 9)}$

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

FACTORIZACION DE UN TRINOMIO DE LA FORMA $X^2 + BX + C$

Los trinomios $x^2 + Bx + C$ se pueden expresar como $(x + \propto)(x + \beta)$ donde**:**

$$\propto + \beta = B$$
$$\propto \times \beta = C$$

Este trinomio resulta del producto de dos binomios que tienen un término común. Para factorizar se procede así:

Ejemplo 1: Factorizar: $x^2 + 7x - 18$

1° Se descompone en dos factores binomios cuyo primer término es x: $(x \quad)(x \quad)$

2° El signo del primer factor es el signo del segundo término del trinomio y el signo del segundo factor resulta de multiplicar el signo del segundo término por el signo del tercero: (x +) (x –)

3° Luego se buscan dos números cuya **suma** algebraica sea el segundo término del trinomio y cuyo **producto** sea el tercer termino:

Ejemplo 1:

$x^2 + 7x - 18 = \mathbf{(x + 9)(x - 2)}$ $\qquad$ $9 - 2 = 7$
$(9)(-2) = -18$

Ejemplo 2:

$x^4 + 4x^2 + 3 = \mathbf{(x^2 + 3)(x^2 + 1)}$ $\qquad$ $3 + 1 = 4$
$(3)(1) = 3$

Ejemplo 3:

$x^6 - 8x^3 - 20 = \mathbf{(x^3 - 10)(x^3 + 2)}$ $\qquad$ $-10 + 2 = -8$
$(-10)(2) = -20$

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

FACTORIZACION DE UN TRINOMIO DE LA FORMA: $AX^2 + BX + C$
FACTORIZACIÓN POR ASPA SIMPLE.

Ejemplos

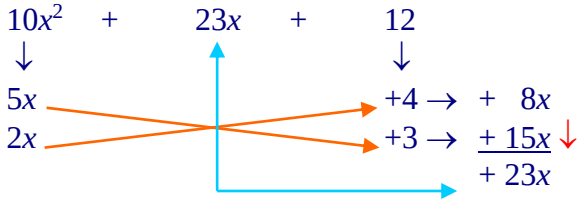
1. Factorizar: $10x^2 + 23x + 12$

- Descomponemos el término $10x^2$ en dos factores que multiplicados nos permitan volver a obtener $10x^2$.

- Descomponemos el término 12 en dos factores que multiplicados nos permitan volver a obtener 12. Es decir:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{10x^2} & + & 23x & + & \underline{12} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 5x & & & & +4 \\ 2x & & & & +3 \end{array}$$

- Enseguida hallamos la suma de los **productos en aspa** de los cuatro términos hallados. Así:



- Si esta suma de **productos en aspa** hallados coinciden con el término central del trinomio, como en este caso, entonces habremos pasado la **prueba del aspa**. Si no se da esta coincidencia, descomponemos los extremos de otra manera.

- Dada la coincidencia con el término central, el polinomio factorizado se escribe como la multiplicación indicada de dos binomios que se toman en forma horizontal de los 4 términos con los que hicimos la prueba del aspa.

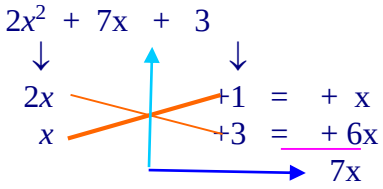
Luego:

$$10x^2 + 23x + 12 = \mathbf{(5x + 4)\,(2x + 3)}$$

2. Factorizar: $2x^2 - +7x + 3$

Solución:

- Aplicando la prueba del aspa:



- Escribimos el polinomio factorizado:

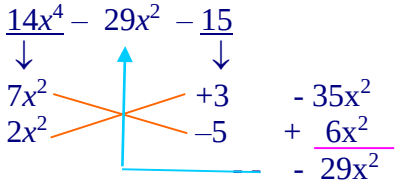
$$2x^2 + 7x + 3 = \mathbf{(2x + 1)\,(x + 3)}$$

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

3. Factorizar: $14x^4 - 15 - 29x^2$

Solución:
El polinomio debe estar ordenado en cuanto a los exponentes de dicha variable, en este caso para que el orden sea descendente intercambiaremos la ubicación del tercer término y del término central.

- Ordenando el polinomio: $14x^4 - 29x^2 - 15$
- Aplicando la prueba del aspa:



- Escribimos el polinomio factorizado:

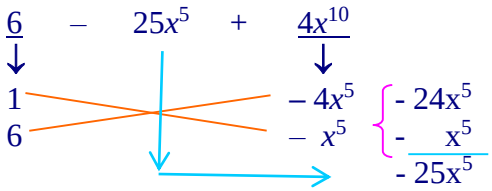
$$14x^4 - 29x^2 - 15 = \mathbf{(7x^2 + 3)\,(2x^2 - 5)}$$

4. Descomponer en sus factores primos el siguiente polinomio: $6 - 25x^5 + 4x^{10}$

Solución:
Este polinomio está ordenado en forma ascendente.

¡IMPORTANTE ¡
Factorizar un polinomio o descomponerlo en sus factores primos es lo mismo.

- Aplicamos la prueba del aspa:



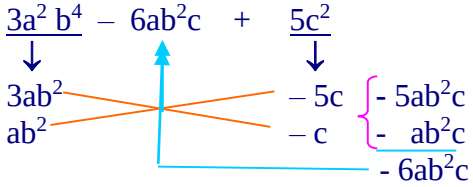
- Escribimos el polinomio factorizado:

$$6 - 25x^5 + 4x^{10} = \mathbf{(1 - 4x^5)\,(6 - x^5)}$$

5. Factorizar: $3a^2 b^4 - 8ab^2c + 5c^2$

Solución:

- Aplicamos la prueba del aspa:



- Escribimos el polinomio factorizado:

$$3a^2 b^4 - 8ab^2c + 5c^2 = \mathbf{(3ab^2 - 5c)\,(ab^2 - c)}$$

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

ESTADÍSTICA

La estadística es un conjunto de procedimiento y técnicas para recoger, organizar y presentar información acerca de un problema determinado, que sirven de base para tomar decisiones

Población muestra y variable

Población, conjunto de individuos u objetos que poseen una característica común.
Muestra, subconjunto de la población.
Variable, es una característica de la población y se llama variable estadística

Tablas y Gráficos:

Después de obtener los datos la tarea de las estadísticas es coleccionar o tabular sus datos (tablas de frecuencia) y representarlos en gráficos adecuadas de comprensión inmediata.

Estos gráficos son:

- Diagrama de barra
- Histogramas
- Polígono de frecuencias
- Gráfico de sectores

Tabla de distribución de frecuencia.

Frecuenta absoluta (fi) o simplemente frecuencia es el número de elementos de la muestra

Frecuencia relativa (hi)

Es el cociente de la frecuencia absoluta entre el número total de datos. Sus valores son números reales que oscilan de 0 a1 que suman 1.

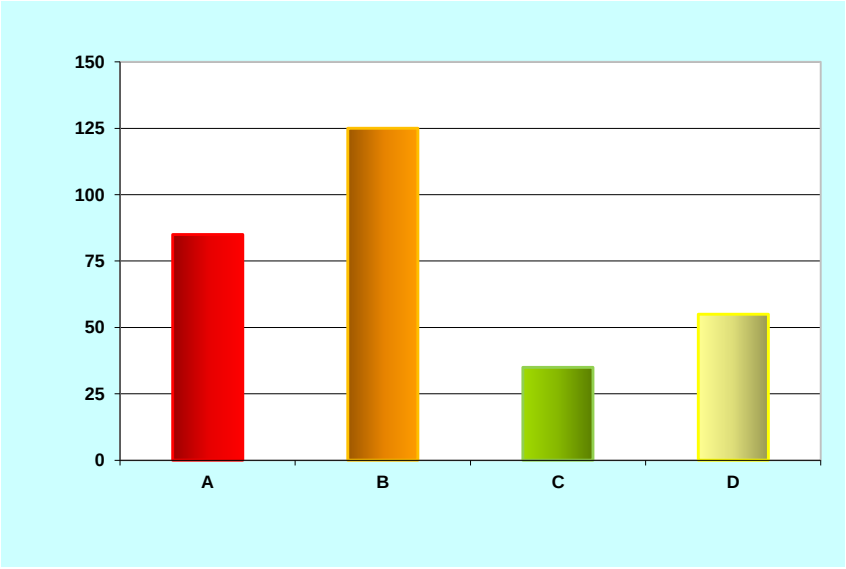
Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval “Almirante Guise”

Ejemplo:
Al averiguar entre 300 personas la preferencia por marcas de jabón, se obtuvieron los siguientes datos:

Marcas de jabón	Frecuencia absoluta fi	Frecuencia relativa hi	%
A	85	85/300	28%
B	125	125/300	42%
C	35	35/300	12%
D	55	55/300	18%
Total	**300**	**1**	**100%**

Gráfico de barras

Llevemos los datos de este cuadro a un gráfico de barras.

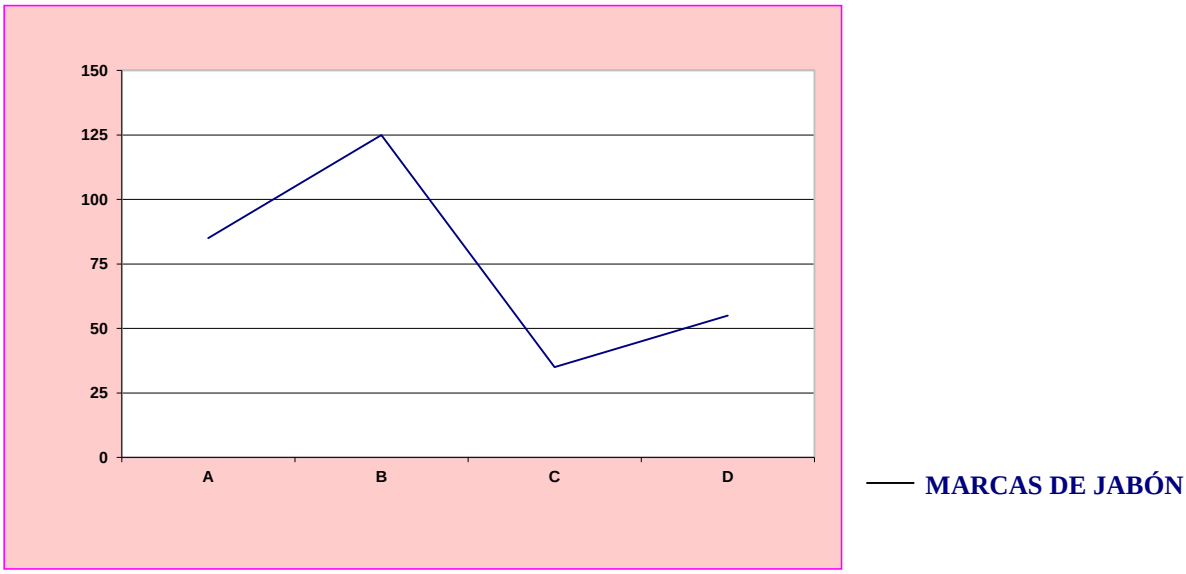


En el eje horizontal colocamos la variable estadística marcas de jabón y en eje vertical colocamos las frecuencias absolutas.

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

Polígono de frecuencias

Si unimos los extremos superiores de las barras del grafico anterior obtenemos un polígono de frecuencia.



Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval “Almirante Guise”

Gráfico de sectores

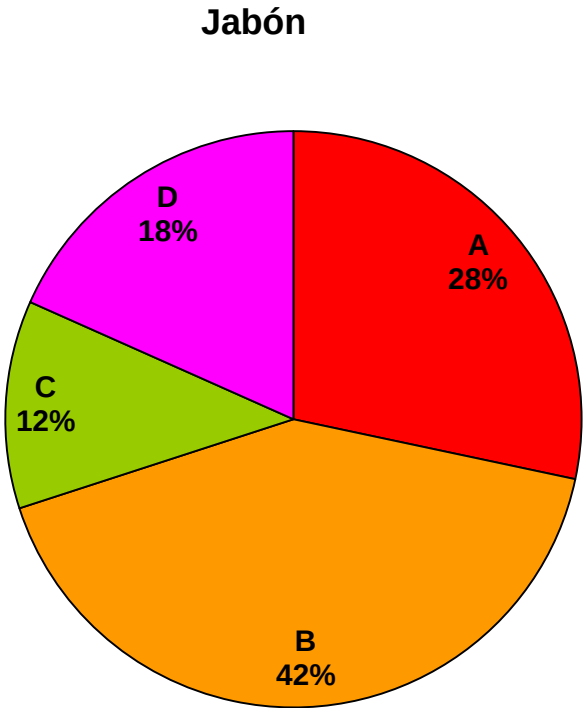
Es un gráfico de forma circular subdivido en sectores. El área de cada sector indica la proporción de cada componente respecto al todo.

En el grafico cada sector se pinta de diferente color para lograr una información rápida acerca de la población en el estudio

En este caso hemos dividido 360°: 300, porque la suma total de frecuencias absolutas es 300ª

Para hallar los ángulos de cada sector procedemos así:

360°: 300 = **1,2°**
Luego multiplicamos cada frecuencia por este resultado.



Jabón A: 85 x 1,2° = **102°**

Jabón C: 35 x 1.2° = **42°**

Jabón B: 125 x 1,2° = **150°**

Jabón D: 55 x 1,2° = **66°**

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

MEDIA ARITMÉTICA

Es un conjunto de valores dividida por el numero total de ellos.

$\underbrace{a_1 ; a_2 ; a_3 \ldots; a_n}_{nvalores}$ $\Rightarrow$ Valores de la variable n

Luego: $\overline{x} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n}{n}$

La media aritmética es el mismo concepto que conocemos como **promedio**

Ejemplo:

Calcular la media aritmética de las notas obtenidas por un alumno en la asignatura de matemática.

Valores de la variable: 12; 14: 12 ; 15; 12; 11; 10; 11; 12; 14 y 14

n = 11 (n es igual al numero de notas)

Luego:

$$\bar{x} = \frac{12+14+12+15+12+11+10+11+12+14+14}{11} = \frac{137}{11} = 12{,}45$$

$\bar{x} = 12{,}45$ (Media aritmética las notas del alumno)

MEDIANA

La mediana es el valor central de los datos una vez que los ordenamos de menor a mayor

Ejemplo:

Datos: 7 5 9 3 1 6 4

Ordenamos: 1 3 4 **5** 6 7 9

3 datos antes ← → 3 datos después

Entonces: la mediana es 5

Si el número de datos es par, se toma el valor medio de los dos datos centrales

Ejemplo:

Dato: 12 15 13 20

Ordenamos:

12 **13** **15** 20

Mediana = (13 + 15): 2 = **14**

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

MODA

Es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia absoluta:

Ejemplo:
La altura en centímetros de 30 alumnos de una clase es:

160 154 158 168 154 158 160 162 165 162

162 166 154 162 160 160 158 158 160 165

154 162 168 160 162 158 160 154 154 160

Variable (altura)	x_i	154	158	**160**	162	165	166	168
Frecuencia	Fi	6	5	8	6	2	1	2

Mayor frecuencia = 8 Entonces Moda es igual **160**cm.

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

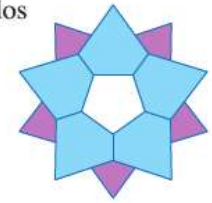
PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA
SEMEJANZA Y CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

CONGRUENCIA DE POLIGONOS

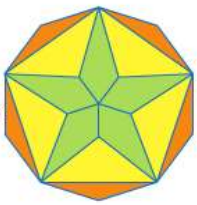
Observa este manto de la cultura Paracas. Las figuras que se repiten son congruentes, aunque sus colores, orientación y posición sean distintas.

Fíjate en estos diseños que están elaborados a partir de polígonos congruentes:

- Los polígonos morados son cuadriláteros congruentes. Los polígonos celestes son pentágonos congruentes.



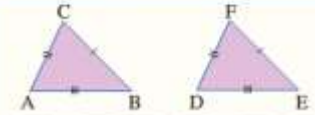
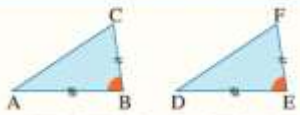
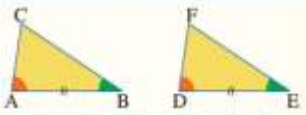
- Los triángulos del mismo color son congruentes. Los cuadriláteros verdes son congruentes.



Los **polígonos congruentes** tienen la misma forma y tamaño, aunque su posición u orientación sean diferentes.

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

La congruencia de triángulos estudia los casos en que dos o más triángulos presentan lados y ángulos congruentes. Para determinar si dos triángulos son congruentes, es suficiente con que cumplan cualquiera de estos criterios:

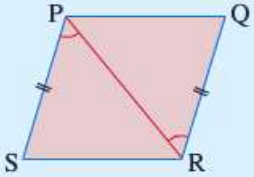
Criterio LLL	Criterio LAL	Criterio ALA
		
Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, entonces: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.	Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, entonces: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.	Si $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\hat{B} \cong \hat{E}$, entonces: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

EJEMPLOS

1. Demostración de congruencia de triángulos

En el cuadrilátero PQRS, el lado PS es igual y paralelo al lado QR. Demuestra que el triángulo PSR es congruente con el triángulo PQR.

- Por datos: PS = QR y $\overline{PS} \,//\, \overline{QR}$
- Por ángulos alternos internos: $m\hat{SPR} = m\hat{PRQ}$
- $\overline{PR}$ es lado común.
- Entonces, $\triangle PSR \cong \triangle PQR$ ← Por LAL.

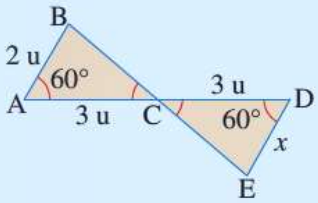


Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

2. Aplicación de los criterios de congruencia

Determina la medida de x.

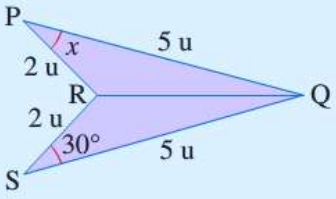
a)



$\triangle ABC \cong \triangle DEC$ ← Por ALA

$x = 2$ u

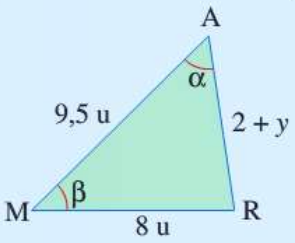
b)

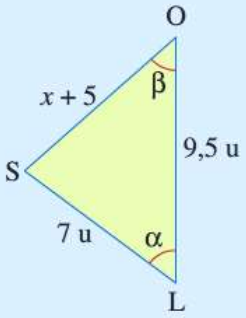


$\triangle PQR \cong \triangle SQR$ ← Por LLL

$x = 30°$

c) Si $\triangle MAR \cong \triangle SOL$, halla el valor de x.



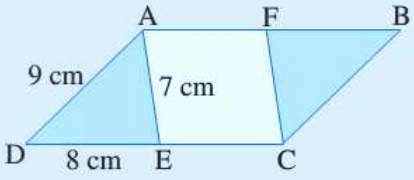


- En $\triangle MAR$, α se opone al lado MR y en $\triangle SOL$, α se opone al lado SO.
- Por congruencia: $\overline{MR} \cong \overline{SO}$

$x + 5 = 8 \longrightarrow x = 3$ u

3. Calculo de medidas mediante los criterios de congruencia.

ABCD es un romboide y $\overline{AE}$ // $\overline{FC}$. Calcula el perímetro del $\triangle CBF$.



- Por ser romboide y por $\overline{AE}$ // $\overline{FC}$:

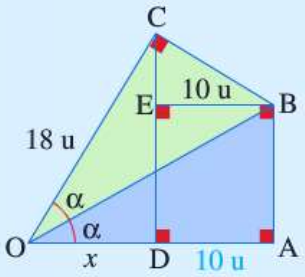
  $\triangle ADE \cong \triangle CBF$ ← Por LLL

  BC = 9 cm, FC = 7 cm y FB = 8 cm
- Calculamos el perímetro: P = 9 + 8 + 7 = 24

El perímetro del $\triangle CBF$ mide 24 cm.

4. Identificación de triángulos congruentes y sus medidas.

Observa la figura y halla el valor de x.



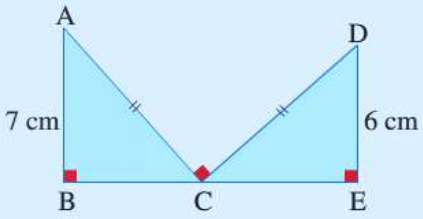
- $\triangle OAB \cong \triangle OCB$ ← Por ALA
- $\overline{BE}$ // $\overline{AD}$, entonces AD = 10
- Por lados correspondientes de triángulos congruentes:

  $\overline{OA} \cong \overline{OC} \longrightarrow x + 10 = 18 \longrightarrow x = 8$ u

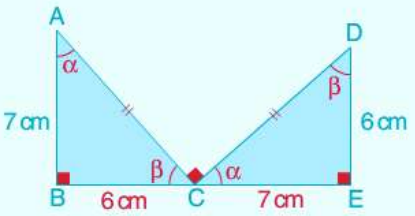
Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

5. Identificación de triángulos congruentes y sus medidas.

En la figura, $\overline{AC} \cong \overline{CD}$. Calcula BE.

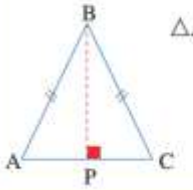
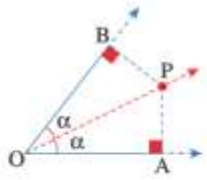
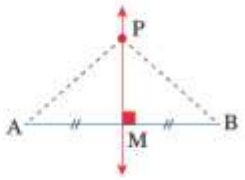


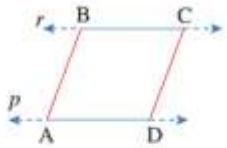
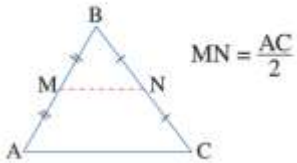
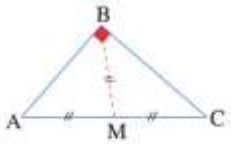
- Completamos los datos en la figura del margen:
  - α y β son ángulos complementarios.
  - Entonces, $\triangle ABC \cong \triangle CED$ ← Por ALA
- Calculamos: $BE = 6 + 7 = 13$ cm



Por lados correspondientes de triángulos congruentes:
$\overline{AB} \cong \overline{CE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DE}$

Aplicaciones de la congruencia de triángulos

Teorema de la altura en un triángulo isósceles	Teorema de la bisectriz	Teorema de la mediatriz
En un triángulo isósceles, la altura con respecto a la base determina dos triángulos congruentes.  $\triangle APB \cong \triangle CPB$ $AB = BC$ $AP = PC$	Todo punto de la bisectriz equidista de los lados del ángulo.  $PB = PA$	Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.  $PA = PB$

Teorema de los segmentos paralelos	Teorema de la base media	Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa
Dos segmentos paralelos comprendidos entre dos rectas paralelas son congruentes.  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{p}$ $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado, y su longitud es la mitad del tercer lado. Base media $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$  $MN = \frac{AC}{2}$	La longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es la mitad de la longitud de dicha hipotenusa.  $AM = MC = BM$ $BM = \frac{AC}{2}$

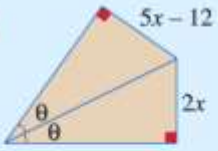
EJEMPLOS:

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

1. Aplicación de los teoremas de congruencia

Calcula el valor de x.

a)



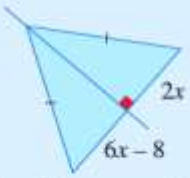
- Por el teorema de la bisectriz:

$5x - 12 = 2x$

$3x = 12$

$x = 4$ u

b)



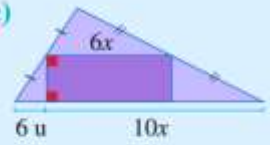
- Por el teorema de la altura en un triángulo isósceles:

$6x - 8 = 2x$

$4x = 8$

$x = 2$ u

c)



- Por el teorema de la base media:

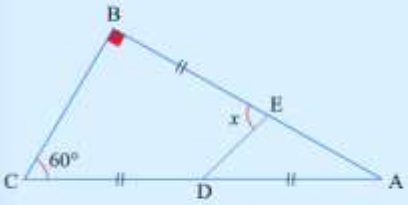
$$6x = \frac{6 + 10x}{2}$$

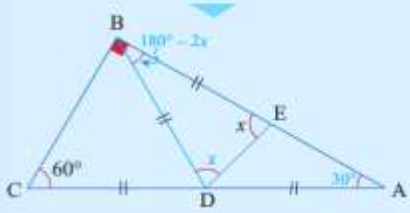
$12x = 6 + 10x$

$2x = 6 \rightarrow x = 3$ u

2. Aplicación de la mediana relativa a la hipotenusa

En el △ABC, calcula el valor de x si AD = CD = BE.





- △ABC es rectángulo.
  Por ángulos complementarios: $C\widehat{A}B = 30°$
- Trazamos el segmento BD que es mediana relativa a la hipotenusa.
  Entonces, CD = AD = BD.
- Se forma el triángulo isósceles BDE, donde $mE\widehat{B}D = 180° - 2x$.
- Se forma el triángulo isósceles ABD:

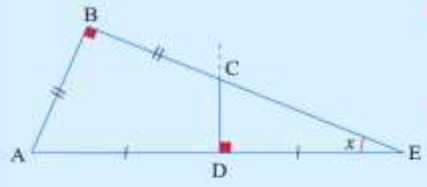
$180° - 2x = 30°$

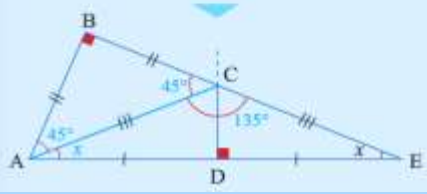
$150° = 2x \rightarrow x = 75°$

El valor de x es 75°.

3. Aplicación de la propiedad de los triángulos isósceles

En el △ABE, AB = BC y AD = DE. Calcula el valor de x.





- Trazamos $\overline{AC}$. Se forma el triángulo rectángulo isósceles ABC cuyos ángulos agudos miden 45°.
- También se forma el triángulo isósceles ACE cuyos ángulos congruentes miden x y el tercer ángulo mide 135°. Planteamos la ecuación:

$135° + 2x = 180°$

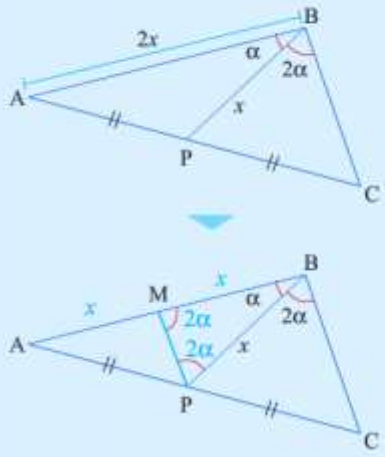
$2x = 45° \rightarrow x = 22{,}5°$

El valor de x es 22°30'.

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

4. Aplicación del teorema de la base media.

En el △ABC, calcula el valor de α.



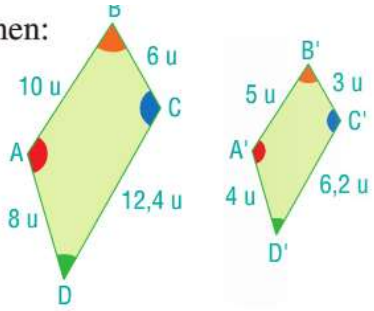
- En el triángulo ABC, trazamos la base media MP con respecto al lado BC.
- $\overline{BC} \parallel \overline{MP}$, por lo tanto,
  $m\widehat{CBP} = m\widehat{BPM} = 2\alpha$ ← Por ángulos alternos internos.
- Se forma el triángulo isósceles MBP cuyos ángulos congruentes miden 2α. Planteamos la ecuación:

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$$
$$5\alpha = 180°$$
$$\alpha = 36°$$

SEMEJANZA DE POLIGONOS

Los polígonos ABCD y A'B'C'D' son semejantes si tienen:

- Los ángulos correspondientes congruentes:
  $\widehat{A} \cong \widehat{A}'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$, $\widehat{C} \cong \widehat{C}'$ y $\widehat{D} \cong \widehat{D}'$
- Los lados correspondientes proporcionales:



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} \rightarrow \frac{10}{5} = \frac{6}{3} = \frac{12,4}{6,2} = \frac{8}{4} = 2$$ ← Razón de semejanza.

La razón de semejanza es el cociente de dos lados homólogos.

Dos **polígonos son semejantes** cuando sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados homólogos son proporcionales.

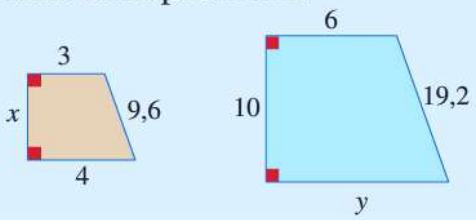
EJEMPLO

1. Identificación de polígonos semejantes:

Si se sabe que los cuadriláteros son semejantes, determina el valor de *x* e *y*.

- Establecemos las proporciones entre los lados correspondientes:

$$\frac{3}{6} = \frac{x}{10} \rightarrow 6x = 30 \rightarrow x = 5$$
$$\frac{3}{6} = \frac{4}{y} \rightarrow 3y = 24 \rightarrow y = 8$$



Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

SEMEJANZA DE TRIANGULOS

De forma análoga, dos triángulos son semejantes si tienen:

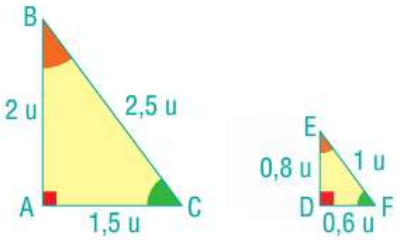
– Los ángulos correspondientes congruentes:

$\hat{A} \cong \hat{D},\ \hat{B} \cong \hat{E}$ y $\hat{C} \cong \hat{F}$

– Los lados correspondientes proporcionales:

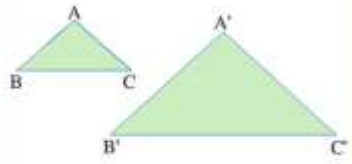
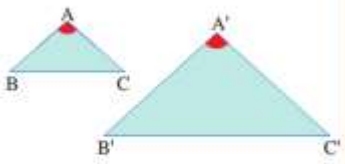
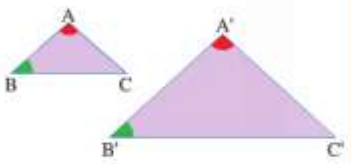
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \rightarrow \frac{2}{0{,}8} = \frac{2{,}5}{1} = \frac{1{,}5}{0{,}6} = 2{,}5$$

Razón de semejanza.



CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes cuando cumple uno de estos criterios:

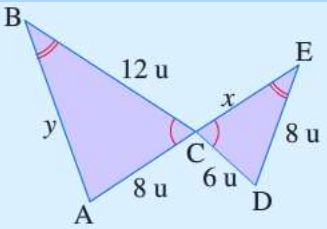
Tres lados proporcionales (LLL)	Un ángulo congruente y sus lados proporcionales (LAL)	Dos ángulos congruentes (AA)
		
$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$	$\hat{A} \cong \hat{A}'$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$	$\hat{A} \cong \hat{A}'$ y $\hat{B} \cong \hat{B}'$
Tienen sus tres lados correspondientes proporcionales.	Tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es congruente.	Tienen dos ángulos congruentes.

EJEMPLOS:

1. Identificación de triángulos semejantes

Observa la figura y calcula x e y.

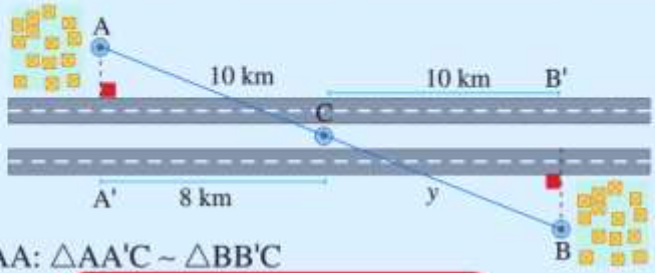
- Por criterio AA: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$
- Hallamos x: $\frac{12}{x} = \frac{8}{6} \rightarrow 8x = 72 \rightarrow x = 9$ u
- Hallamos y: $\frac{y}{8} = \frac{8}{6} \rightarrow 6y = 64 \rightarrow y = 10{,}7$ u



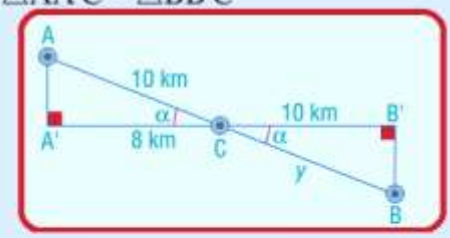
Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

2. Problema de semejanza:

Una empresa levantó torres de alta tensión en tres puntos: A, B y C. El esquema muestra la posición de las torres. ¿Cuál es la distancia entre las torres A y B?



- Por criterio AA: $\triangle AA'C \sim \triangle BB'C$

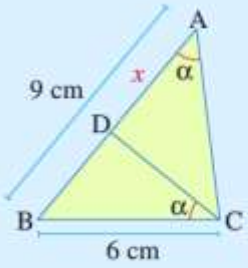


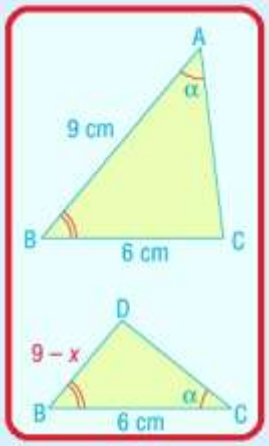
- Calculamos y: $\frac{A'C}{B'C} = \frac{AC}{BC} \rightarrow \frac{8}{10} = \frac{10}{y} \rightarrow 8y = 100 \rightarrow y = 12{,}5$

La distancia entre las torres A y B es: 10 km + 12,5 km = 22,5 km

3. Calculo de medidas en triángulos semejantes

a) En la figura, calcula AD.

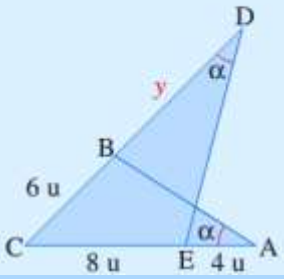




- Sea x la medida de $\overline{AD}$.
- Por criterio AA: $\triangle ABC \sim \triangle DBC$ (ver margen)
- Hallamos x: $\frac{9}{6} = \frac{6}{9-x} \rightarrow 81 - 9x = 36 \rightarrow x = 5$

El segmento AD mide 5 cm.

b) Observa y calcula BD.



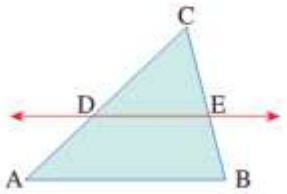
- Sea y la medida de $\overline{BD}$.
- Por criterio AA: $\triangle EDC \sim \triangle BAC$
- Hallamos y: $\frac{12}{6+y} = \frac{6}{8} \rightarrow 96 = 36 + 6y \rightarrow y = 10$

El segmento BD mide 10 u.

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Toda paralela a uno de los lados de un triángulo que intersecta a los otros dos lados determina con esos lados un triángulo semejante al primero.



$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC$

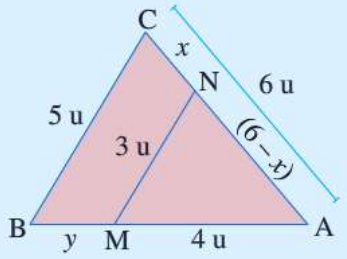
EJEMPLO:

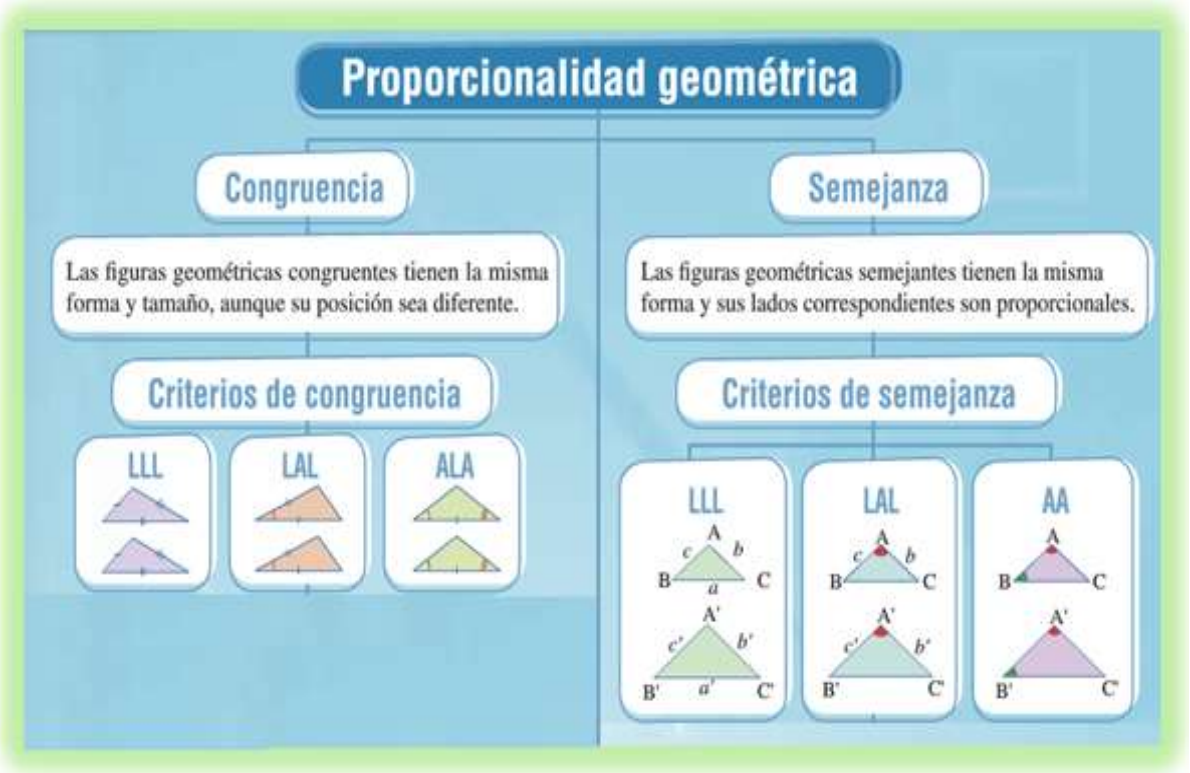
Si $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, determina los valores de x e y.

- Por el teorema fundamental: $\triangle ABC \sim \triangle AMN$
- Establecemos las proporciones:

$$\frac{5}{3} = \frac{6}{6-x} \longrightarrow 30 - 5x = 18 \longrightarrow x = 2{,}4 \text{ u}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{y+4}{4} \longrightarrow 20 = 3y + 12 \longrightarrow y = 2{,}7 \text{ u}$$





Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval "Almirante Guise"

BIBLIOGRAFÍA

1	MATRIX 2	Editorial Norma
2	SÍMBOLOS 2	Ediciones Santillana
3	MATEMÁTICA 2	Manuel Coveñas Naquiche Editorial Coveñas
4	MATEMÁTICA PROGRESIVA 2 ALGEBRA Y GEOMETRIA	Nelson Londoño Hernando Bedoya
5	MATEMÁTICA 2	Alfonso Rojas Puémape Colección SKANNERS

1	GEOMETRÍA PLANA Y DEL ESPACIO	José Santibáñez Marín Colección Euclides.
2	ARITMÉTICA – CURSO PRACTICO	Oscar Raúl Farfán Alarcón Editorial San Marcos
3	GEOMETRÍA – CURSO BASICO	Luis Ubaldo Caballero Editorial San Marcos
4	ÁLGEBRA – CURSO BASICO	Carlos Torres Matos Editorial San Marcos
6	ÁLGEBRA ESTRUCTURAL	SALVADOR TIMOTEO Editorial SAN MARCOS

Este material educativo es para uso exclusivo de los alumnos del Programa de Educación a Distancia del Liceo Naval “Almirante Guise”